

# МАТЕМАТИКА

---

# MATHEMATICS

УДК 621.372

doi:10.21685/2072-3040-2022-1-1

## Численное исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных сферических резонаторов

Ю. А. Петрова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

petroval1999@rambler.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Диэлектрические сферические резонаторы в связи с широкими возможностями их применения становятся все чаще предметом научных исследований. Исследования решений характеристического уравнения открытого неоднородного сферического резонатора, состоящего из двух слоев, показали необходимость введения среднего слоя. Поэтому целью данной работы было численное исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытого неоднородного радиально-трехслойного резонатора. *Материалы и методы.* Дан обзор теории собственных волн диэлектрического шара. Особое внимание уделено модам с большими радиальными и азимутальными индексами (модам «шепчущей галереи»). Решается система уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром, которая сводится к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. *Результаты.* Исходная модельная задача сведена к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Полученное характеристическое уравнение исследовано для случая, когда параметры структуры внутреннего и внешнего шара совпадают. *Выводы.* Предложен и реализован численный метод, основанный на нахождении корней характеристического уравнения с помощью метода пристрелки, для исследования структуры среднего слоя, заполненного бензином, воздухом, этиловым спиртом, трансформаторным маслом и плавленым кварцем. Проиллюстрированы зависимости решения системы от частот, а также значений волнового числа/частоты от радиуса.

**Ключевые слова:** трехслойный шаровой резонатор, уравнения Максвелла, электромагнитные колебания, потенциалы Дебая

**Финансирование:** работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-31-51004.

**Для цитирования:** Петрова Ю. А. Численное исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных сферических резонаторов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 1. С. 3–12. doi:10.21685/2072-3040-2022-1-1

## Numerical problem research of electromagnetic oscillations of open nonuniform spherical resonators

Yu.A. Petrova

---

© Петрова Ю. А., 2022. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Penza State University, Penza, Russia  
petroval1999@rambler.ru

**Abstract.** *Background.* Dielectric spherical resonators, due to the wide possibilities of their application, are increasingly becoming a subject for scientific research. Studies of the spectral characteristics of an open two-layer spherical resonator have shown that when measuring the dielectric properties of a liquid with losses occupying a small volume, it becomes necessary to introduce a middle layer. Therefore, the purpose of this work was to analytically and numerically investigate a dielectric resonator made in the form of a radial three-layer ball. *Materials and methods.* First, a review of the theory of natural waves of a dielectric sphere is given. Special attention is paid to modes with large radial and azimuthal indices. The system of Maxwell's equations is solved in the case of a space with a dielectric ball, which is reduced to solving a scalar equation for the so-called Debye potentials. *Results.* The initial model problem is reduced to solving a scalar equation for Debye potentials. The obtained characteristic equation is investigated for the case when the parameters of the structure of the inner and outer ball coincide. The solutions of this equation allow us to study the dependence of the complex permittivity of the substance under study on the parameters of the resonator with its known spectral characteristics. *Conclusions.* A numerical method based on finding the root equation using the ranging method is proposed. An algorithm was developed in the Maple mathematical package and applied to study the structure of a layer filled with gasoline, air, ethyl alcohol, transformer and fused quartz. The dependences of the solution of the system on frequencies, as well as the values of the wave number / frequency on the radius are illustrated.

**Keywords:** Triple Layered Ball Resonator, Maxwell's equations, electromagnetic oscillations, Debye Potentials

**Acknowledgments:** the research was supported by the grant No. 19-31-51004 of the Russian Foundation for Basic Research

**For citation:** Petrova Yu.A. Numerical problem research of electromagnetic oscillations of open nonuniform spherical resonators. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2022;(1):3–12. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2022-1-1

## Введение

Диэлектрические сферические резонаторы в связи с широкими возможностями их применения становятся все чаще предметом научных исследований. Этому способствуют новые технологии, позволяющие создавать сферические резонаторы малых размеров с произвольным числом радиальных слоев. Такие резонаторы могут использоваться для стабилизации сверхвысокочастотных генераторов, в сканирующих и многолучевых антенных системах, при создании прецизионной измерительной аппаратуры.

В начале XX в. было установлено, что в диэлектрических шарах существуют волны с пространственной структурой, схожей с волнами «шепчущей галереи». Эти слабозатухающие колебания, образованные в результате отражения полей от гладкой поверхности, нашли свое применение в технике благодаря локализации полей на границе раздела сред.

Исследования решений характеристического уравнения открытого неоднородного сферического резонатора, состоящего из двух слоев, показали необходимость введения среднего слоя. Поэтому целью данной работы было численное исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытого неоднородного радиально-трехслойного резонатора.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим резонатор, расположенный в изотропной среде, ограниченный сферической поверхностью радиуса  $r_3$ . Он представляет собой систему трех concentрически расположенных шаровых диэлектрических слоев с постоянными диэлектрическими и магнитными проницаемостями:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r \leq r_1; \\ \varepsilon_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \varepsilon_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \varepsilon_4, & r_3 \leq r; \end{cases} \quad \mu(r) = \begin{cases} \mu_1, & r \leq r_1; \\ \mu_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \mu_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \mu_4, & r_3 \leq r; \end{cases}$$

где  $\varepsilon_j = \varepsilon_{0j}(1 + i\delta_{0j})$ ,  $\mu_j = \mu_{0j}$ ;  $\varepsilon_{0j}, \mu_{0j}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) – заданные значения диэлектрических и магнитных проницаемостей;  $\operatorname{tg}\delta_{0j}$  – тангенс диэлектрических потерь для  $j$ -го слоя.

Решение уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. Для решения воспользуемся сферической системой координат  $r, \theta, \varphi$  и получим уравнения для потенциалов электромагнитного поля вида

$$\begin{aligned} \left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right) U_j^E(r, \theta, \varphi) &= 0, \\ \left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2}\right) U_j^H(r, \theta, \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ ;  $T_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_j^2$ ;  $\chi = \sqrt{\varepsilon\mu}k$ ;  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $c$  – скорость света.

Для решений уравнений (1) должны быть выполнены следующие условия: амплитуды полей колебаний при  $r=0$  конечны, при  $r \rightarrow \infty$  отсутствуют приходящая и уходящая волны, тангенциальных компоненты полей на границе раздела сред непрерывны.

Функции  $U_j^S(r, \theta, \varphi)$  представим в виде

$$U_j^S(r, \theta, \varphi) = \sum_q R_{j,q}^S(r) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi),$$

где  $P_n^m(\cos\theta)$  – сферические функции Лежандра первого рода;  $R_{j,q}^S(r)$  – функции, описывающие распространение по радиальной координате полей типа  $S$   $q$ -й моды в  $j$ -й области. Индексы  $m, n$ , содержащиеся в  $q$ , обозначают число пространственных полуволн, укладывающихся по азимутальному углу  $\varphi$ , а  $m=0$  – по полярному  $\theta$ .

Соотношения (1), определяющие компоненты  $q$ -й моды  $E$ -типа и  $H$ -типа, в сферической системе координат приобретают следующие вид:

$$\begin{aligned}
 H_{q,r}(r, \theta, \varphi) &= 0, \\
 E_{q,r}(r, \theta, \varphi) &= \left[ \varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^E(r, \theta, \varphi), \\
 H_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) &= -\frac{ik\varepsilon(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\
 E_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r}, \\
 H_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) &= \frac{ik\varepsilon(r)}{r} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \\
 E_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r}; \\
 H_{q,r}(r, \theta, \varphi) &= \left[ \varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^H(r, \theta, \varphi), \\
 E_{q,r}(r, \theta, \varphi) &= 0, \\
 H_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r}, \\
 E_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) &= \frac{ik\mu(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\
 H_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r}, \\
 E_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) &= -\frac{ik\mu(r)}{r} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

Опишем функции  $R_q^S(r)$ , которые определяют распространение парциальных  $q$ -х волн  $S$ -типа по радиальной координате:

$$R_q^S(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A_{q,1}^S j_n(\chi_1 r), & 0 \leq r \leq r_1 \\ A_{q,2}^S j_n(\chi_2 r) + B_{q,2}^S \eta_n(\chi_2 r), & r_1 \leq r \leq r_2 \\ A_{q,3}^S j_n(\chi_3 r) + B_{q,3}^S \eta_n(\chi_3 r), & r_2 \leq r \leq r_3 \\ A_{q,4}^S h_n^{(1)}(\chi_4 r), & r_3 \leq r \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $A_{q,j}^S, B_{q,j}^S$  – амплитуды колебаний  $S$ -типа в  $j$ -й области;  $j_n(x), \eta_n(x), h_n^{(1)}(x)$  – сферические функции, связанные отношениями вида  $z_n(x) = \sqrt{\pi x / 2Z} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$  с цилиндрическими функциями Бесселя  $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ ,

Неймана  $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$  и Ханкеля  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$  соответственно.

Условия на  $j$ -й границе раздела сред удовлетворены при:

$$\zeta_j R_q^S(\chi_j r_j) = \zeta_{j+1} R_q^S(\chi_{j+1} r_j) \quad \text{и} \quad \left. \frac{dR_q^S(\chi_j r)}{dr} \right|_{r=r_j} = \left. \frac{dR_q^S(\chi_{j+1} r)}{dr} \right|_{r=r_j}.$$

Здесь  $\zeta_j = \varepsilon_j$  для колебаний  $E$ -типа и  $\zeta_j = \mu_j$  для  $H$ -типа.

## 2. Характеристическое уравнение

Удовлетворяя всем условиям, введем обозначение  $z_{i,j} = z_n(\chi_i r_j)$ , тогда получим систему алгебраических уравнений относительно констант  $A_{q,j}^S, B_{q,j}^S$ :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 A_{q,1}^S j_{1,1} &= \zeta_2 \left[ A_{q,2}^S j_{2,1} + B_{q,2}^S \eta_{2,1} \right]; \\ \chi_1 A_{q,1}^S j'_{1,1} &= \chi_2 \left[ A_{q,2}^S j'_{2,1} + B_{q,2}^S \eta'_{2,1} \right]; \\ \zeta_2 \left[ A_{q,2}^S j_{2,2} + B_{q,2}^S \eta_{2,2} \right] &= \zeta_3 \left[ A_{q,3}^S j_{3,2} + B_{q,3}^S \eta_{3,2} \right]; \\ \chi_2 \left[ A_{q,2}^S j'_{2,2} + B_{q,2}^S \eta'_{2,2} \right] &= \chi_3 \left[ A_{q,3}^S j'_{3,2} + B_{q,3}^S \eta'_{3,2} \right]; \\ \zeta_3 \left[ A_{q,3}^S j_{3,3} + B_{q,3}^S \eta_{3,3} \right] &= \zeta_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)}; \\ \chi_3 \left[ A_{q,3}^S j'_{3,3} + B_{q,3}^S \eta'_{3,3} \right] &= \chi_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где штрих у функций  $f'_{n,m}$  обозначает дифференцирование по аргументу.

Выразим все постоянные в (2) через  $A_{q,2}^S$  следующим образом:

$$B_{q,2}^S = -\frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S, \quad A_{q,3}^S = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} \frac{j_{2,3} [j_1 \eta_2]_1 - \eta_{2,3} [j_1 j_2]_1}{j_{3,2} [h_4 \eta_3]_3 - \eta_{3,2} [h_4 j_3]_3} \frac{[h_4 \eta_3]_3}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S,$$

$$B_{q,3}^S = -\frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} A_{q,3}^S, \quad A_{q,1}^S = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \left[ j_{2,1} - \frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} \eta_{2,3} \right] A_{q,2}^S,$$

$$A_{q,4}^S = \frac{\zeta_3}{\zeta_4 h_{4,3}} \left[ j_{3,3} - \frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} \eta_{3,3} \right] A_{q,3}^S.$$

Здесь

$$[f_i g_j]_k = q_i f'_{i,k} g_{j,k} - q_j f_{i,k} g'_{j,k}, q_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{\zeta_i}.$$

Соблюдая условие нетривиальности решений системы (3), получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = \\ = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения (4) определяют комплексные частоты собственных колебаний.

### 3. Численный метод решения характеристического уравнения

Ниже численно исследован шаровой резонатор, в котором параметры внутреннего и внешнего шаров совпадают, а средний слой заполнен изучаемым веществом. При этом уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = \\ = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если перенести правую часть (5) влево, то мы получим дисперсионное уравнение для вычисления собственных значений  $\chi$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\chi) \equiv \lambda [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} - \\ - [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_3 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Представим в виде комплексного числа:  $\chi = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Теперь мы можем получить систему вещественных уравнений для определения волнового числа  $\chi$ , а точнее – его вещественной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\chi) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\chi) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Определим набор  $(\alpha, \beta)$ , для этого решим данную систему уравнений (7) с помощью метода пристрелки. Для начала введем сетку, узлы которой  $\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}$ , т.е. разобьем отрезки по  $\alpha$  и  $\beta$ , а после вычислим решение для каждого узла.

Далее исследуем первое уравнение системы (7). Найдем точку  $(\alpha^{(i)}, \hat{\beta}^{(j)})$ , которая удовлетворяет условиям:  $\hat{\beta}^{(j)}$  лежит внутри интервала  $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)})$ ;  $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$ . Повторим этот алгоритм для всех интервалов сетки и получим набор пар  $(\beta^{(p)}, \beta^{(q)})$ , который отражается в кривой

(кривая 1 на рис. 1), приближенном решении уравнения  $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$  в плоскости  $O\alpha\beta$ .

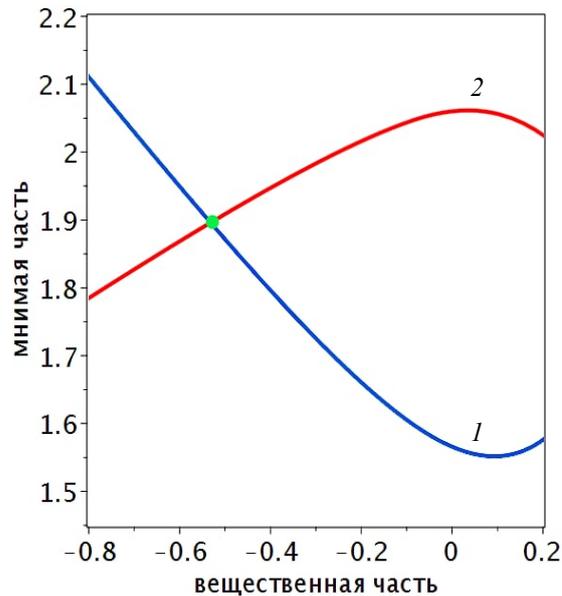


Рис. 1. Численное решение системы (7)

Воспроизведем ту же процедуру для второго уравнения  $\Delta_2(\alpha, \beta) = 0$  системы (7) и получим еще одну кривую (кривая 2 на рис. 1). Для отыскания приближенного решения задачи нам необходимо найти точку пересечения расчетных кривых. Для нахождения более точного решения увеличим число разбиений по отрезкам, насколько это необходимо.

#### 4. Численные результаты

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных в предыдущих пунктах, ниже проведено численное исследование характеристического уравнения (получены графики зависимости волнового числа  $\chi$  от круговой частоты  $\omega$ ) с разными значениями относительной диэлектрической проницаемости среднего слоя  $\epsilon_{02}$  и с различными значениями толщин  $\Delta = r_2 - r_1$ .

Параметры, общие для всех расчетов, выбраны следующим образом: внешний радиус  $r_3 = 3,9$  см. Магнитная проницаемость для всех сред  $\mu_j = 1$ . Как и оговаривалось выше, внутренний шар и наружный слой будут считаться изготовленными из одного материала, а точнее – из фторопласта, параметры которого:  $\epsilon_{01} = \epsilon_{03} = 2,07$ ,  $\text{tg } \delta_{01} = \text{tg } \delta_{03} = 1,7 \cdot 10^{-4}$ . Параметры для среднего слоя выбраны следующим образом: заполнялся бензином  $\epsilon_{02} = 1,88$ ,  $\text{tg } \delta_{02} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ , воздухом  $\epsilon_{02} = 1,0$ ,  $\text{tg } \delta_{02} = 0$ , этиловым спиртом  $\epsilon_{02} = 4,1$ ,  $\text{tg } \delta_{02} = 3,05 \cdot 10^{-1}$ , трансформаторным маслом  $\epsilon_{02} = 2,2$ ,  $\text{tg } \delta_{02} = 4,5 \cdot 10^{-2}$ , плавленным кварцем  $\epsilon_{02} = 3,6$ ,  $\text{tg } \delta_{02} = 1,2 \cdot 10^{-4}$ .

Расчеты на рис. 2 выполнены при  $\Delta=0,1$ . Из рисунков замечаем, что колебания  $E$ -типа соответствуют меньшие значения волновых чисел, чем колебания  $H$ -типа. Это прослеживается и в других вычислениях. Модули максимальных значений волнового числа принадлежат решению системы  $H$ -типа, когда средний слой заполнен этиловым спиртом.

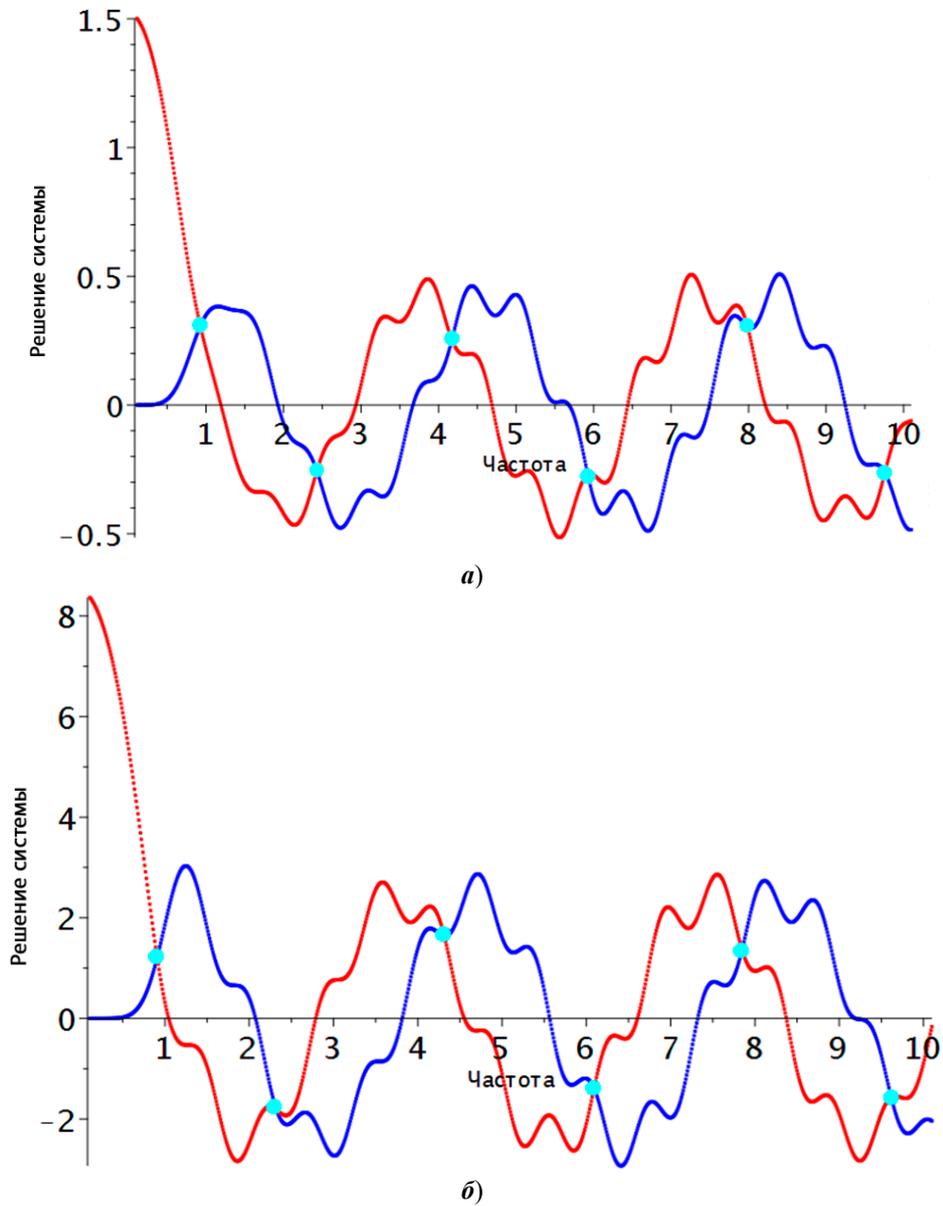


Рис. 2. Численное решение системы (7) для колебаний  $E$ -типа (а),  $H$ -типа (б). Средний слой заполнен бензином

Предложенный метод нахождения нескольких первых частот для различных материй и размеров среднего слоя трехслойного шара верен.

На рис. 3 показаны зависимости мнимой и вещественной частей решения от толщины среднего слоя, заполненного различными диэлектриками.

Показана зависимость значений вещественной и мнимой частей решения системы от толщины среднего слоя. На графиках видно, что значения сильно отличаются и это дает возможность однозначно определить вещества, находящиеся внутри, а значит, и по-новому их исследовать.

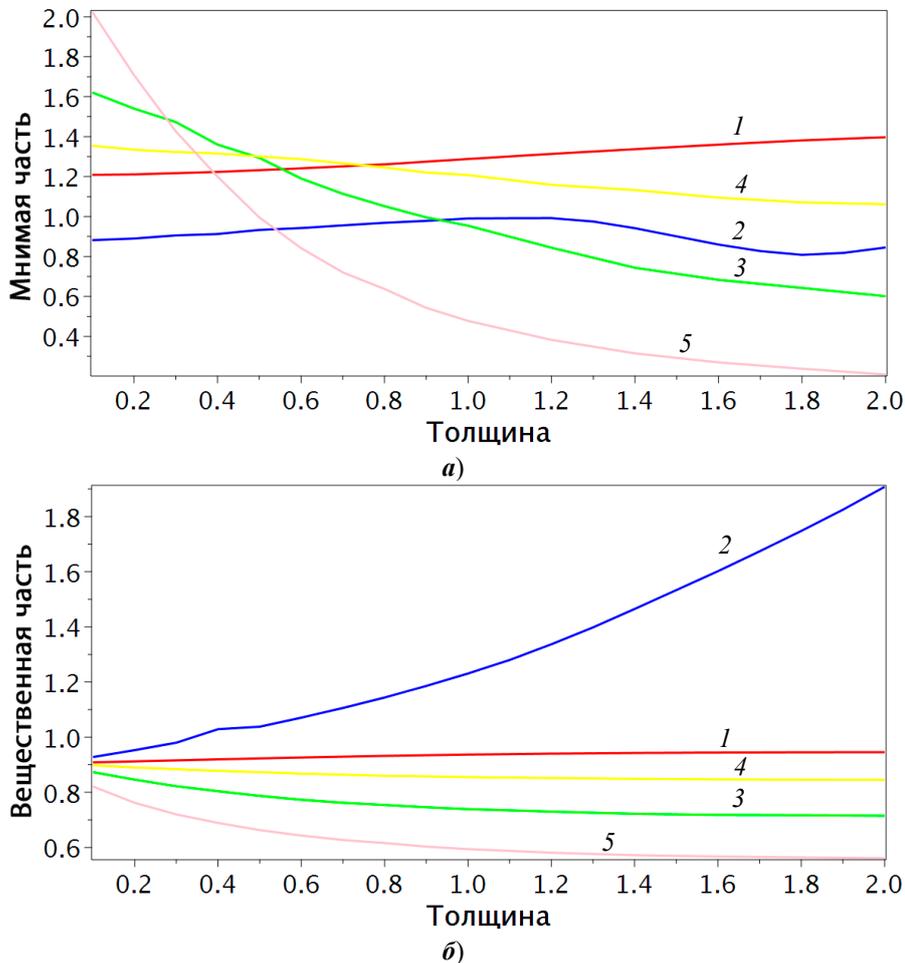


Рис. 3. Зависимости мнимой (а) и вещественной (б) части решения (7) собственных колебаний  $H$ -типа от толщины среднего слоя, заполненного: бензином (кривая 1), воздухом (кривая 2), плавленным кварцем (кривая 3), трансформаторным маслом (кривая 4), этиловым спиртом (кривая 5)

### Заключение

Исходная модельная задача сведена к решению скалярного уравнения для потенциалов Дебая. Полученное характеристическое уравнение исследовано для случая, когда параметры структуры внутреннего и внешнего шара совпадают. Предложен численный метод, основанный на нахождении корней характеристического уравнения с помощью метода пристрелки. Разработан алгоритм в математическом пакете *Maple* и применен для исследования структуры среднего слоя, заполненного бензином, воздухом, этиловым спиртом, трансформаторным маслом и плавленным кварцем. Проиллюстрированы зависимости решения системы от частот, а также значений волнового чис-

ла/частоты от радиуса. Численные результаты, полученные на основе разработанных в данной работе методов, совпадают с данными, полученными другими методами [1–3].

### Список литературы

1. Суворова О. А., Филиппов Ю. Ф. Трехслойный шаровой резонатор для измерения диэлектрических проницаемостей веществ // Радиофизика и радиоастрономия. 2007. Т. 12, № 2. С. 214–222.
2. Ораевский А. Н. Теория оптических волн шепчущей галереи // Квантовая электроника. 2002. Т. 32. С. 377–400.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.

### References

1. Suvorova O.A., Filippov Yu.F. Three-layer spherical resonator for measuring the dielectric constants of substances. *Radiofizika i radioastronomiya = Radiophysics and radio astronomy*. 2007;12(2):214–222. (In Russ.)
2. Oraevskiy A.N. Whispering gallery optical wave theory. *Kvantovaya elektronika = Quantum electronics*. 2002;32:377–400. (In Russ.)
3. Vaynshteyn L.A. *Elektromagnitnye volny = Electromagnetic waves*. Moscow: Radio i svyaz', 1988:440. (In Russ.)

### Информация об авторах / Information about the authors

**Юлия Александровна Петрова**  
инженер-исследователь,  
Научно-исследовательский центр  
«Суперкомпьютерное моделирование  
в электродинамике», Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

**Yuliya A. Petrova**  
Research engineer, Scientific Research  
Center “Supercomputer modeling  
in electrodynamics”, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

E-mail: petroval1999@rambler.ru

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию / Received 19.11.2021**

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.12.2021**

**Принята к публикации / Accepted 15.01.2022**